Dm – 2^{nd} 1

EQUATIONS CARTESIENNES DE DROITES et SYSTEMES d'EQUATIONS

Exercice 1 : Pour chacune des affirmations qui suit, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant à chaque fois :

- Affirmation 1 : Le point de coordonnées $M(1\,;5)$ appartient à la droite d d'équation $$4\,x-2\,y-19=0$$
  $4\times\mathbf{1}-2\times\mathbf{5}-19=4-10-19=-25\ \neq 0$. Les coordonnées du point M ne vérifient pas l'équation de d. Donc $M\notin d$. L'affirmation 1 est donc fausse.

- Affirmation 2 : Les droites d et d' d'équation $3x-2y+4=0$ et $-4{,}5x+3y-6=0$ sont parallèles ?
  La droite d'équation $3x-2y+4=0$ est du type $ax+by+c=0$ avec $a=3$ et $b=-2$. Elle a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. De même, la droite d'équation $-4{,}5\,x+3\,y-6=0$ a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-4{,}5\end{pmatrix}$.
  On a $\det(\vec{u}\,,\vec{v})=\det\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-4{,}5\end{pmatrix}\right)=2\times(-4{,}5)-3\times(-3)=-9+9=0$
  Les vecteurs $\vec{u}\,,\vec{v}$ sont donc colinéaires. Les droites sont donc pas parallèles. L'affirmation 2 est donc vraie.

- Affirmation 3 : Les droites d et d' d'équation $3x-2y+4=0$ et $-4{,}5x+3y-6=0$ sont confondues ?
  En multipliant les membres de gauche et de droite de $3x-2y+4=0$ par $(-1{,}5)$, on retrouve l'équation $-4{,}5x+3y-6=0$. Ces équations sont donc équivalentes et repèrent la même droite. L'affirmation 3 est donc vraie, les droites d et d' sont les mêmes.

Exercice 2 :

1- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(4\,;0)$ et $B(8\,;-5)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8-4\\-5-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de la droite.

La droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $a=-5$ et $b=-4$ a comme vecteur directeur, le vecteur $\vec{u}$.

Une équation de cette droite est donc $-5\,x-4\,y+c=0$

Elle passe par le point $A(4\,;0)$, si ses coordonnées vérifient l'équation, donc si :

$$-5\times 4-4\times 0\ +c=0$$
$$-20-0+c=0$$
$$-20+c=0$$
$$c=20$$

Une équation cartésienne recherchée est donc $-5x-4\,y+20=0$

2- En déduire l'équation réduite de (AB).

On met cette équation sous la forme $y=mx+p$.

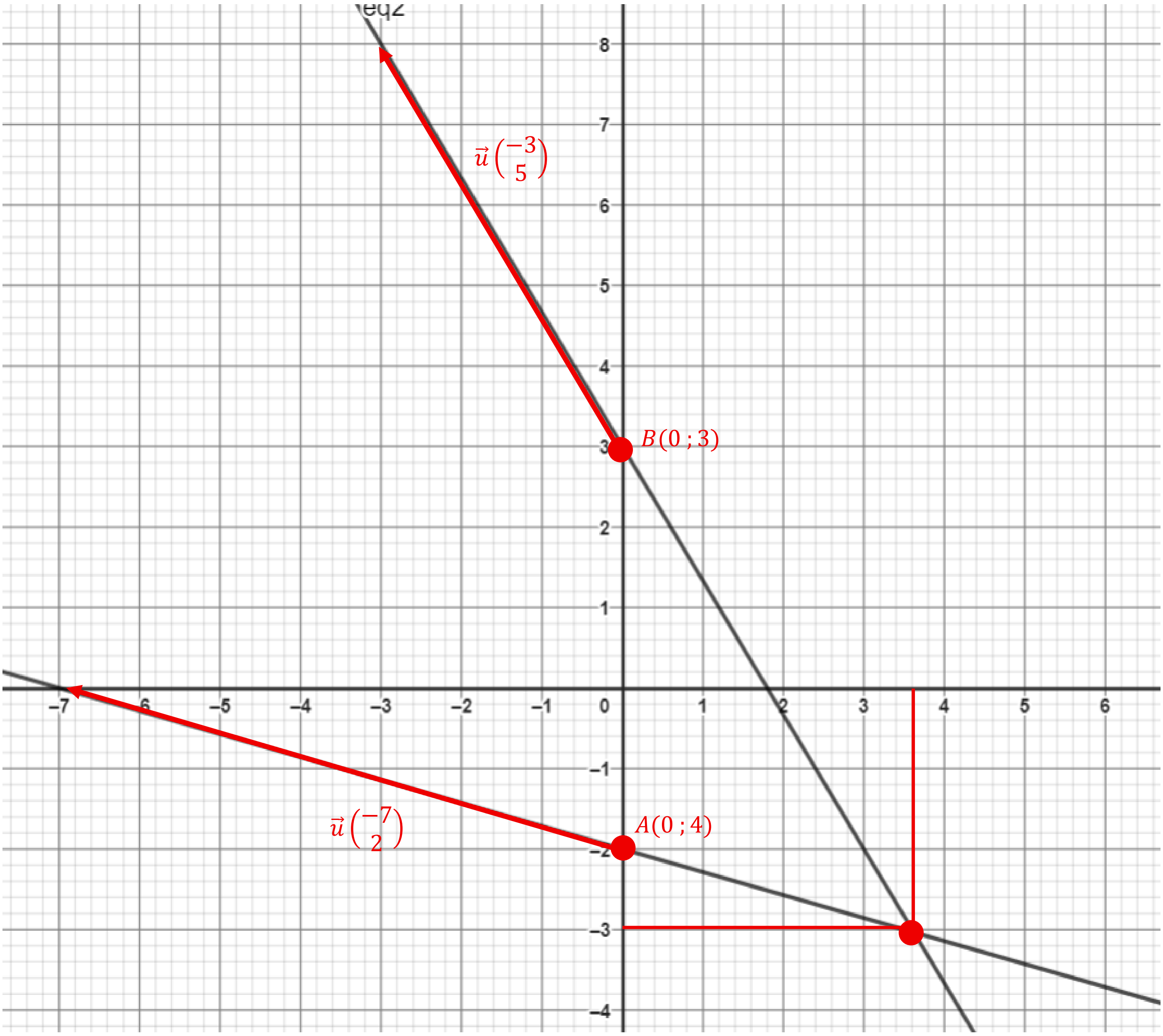
$$-5x-4\,y+20=0$$
$$-4\,y=-20+5x$$
$$y=\frac{-20}{-4}+\frac{5x}{-4}$$
$$y=-\frac{5}{4}x+\frac{20}{4}$$

L'équation réduite de la droite (AB) est donc : $y=-1{,}25\,x+5$

Exercice 3 : On donne le système suivant : $\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\,x + 7\,y = -14 \\ 5\,x + 3\,y = 9 \end{cases}$

1- Tracer ci-dessous, les droites d'équation $2x + 7y + 14 = 0$ et $5x + 3y - 9 = 0$ et déterminer la solution du système par la méthode graphique, avec une précision au dixième.

$2x + 7y + 14 = 0$	$5x + 3y - 9 = 0$
Vecteur directeur $\vec{u}\binom{-7}{2}$	Vecteur directeur $\vec{v}\binom{-3}{5}$
Point $A(x, y)$ avec par exemple $x = 0$	Point B(x, y) avec par exemple $x = 0$
Si A appartient à la droite : $2 \times 0 + 7y + 14 = 0$	Si A appartient à la droite : $5\times 0 + 3y - 9 = 0$
$7y = -14$	$3y = 9$
$y = \frac{-14}{7} = -2$	$y = 3$
Donc $A(0\,; -2)$	Donc B$(0\,; 3)$



Les coordonnées du point d'intersection sont lues graphiquement : $(x, y) \approx (3{,}6\,;\ -3{,}0)$

2- Résoudre à présent ce système en utilisant la méthode par combinaison deux fois, une première fois pour trouver x, une seconde fois pour trouver y. Donner la solution (x, y) avec une précision au centième.

$\begin{matrix} 5\,E_1 \\ 2\,E_2 \end{matrix} \begin{cases} 10\,x + 35\,y = -70 \\ 10\,x + 6\,y = 18 \end{cases}$ $5\,E_1 - 2\,E_2$: $35y - 6y = -70 - 18$ $29\,y = -88$ $y = \frac{-88}{29} \approx -3{,}03$	$\begin{matrix} 3\,E_1 \\ 7\,E_2 \end{matrix} \begin{cases} 6\,x + 21\,y = -42 \\ 35\,x + 21\,y = 63 \end{cases}$ $7\,E_2 - 3\,E_1$: $29\,x = 105$ $x = \frac{105}{29} \approx 3{,}62$
La solution du système est $x = -\frac{88}{29} \approx -3{,}03$ et $y = \frac{105}{29} \approx 3{,}62$	

Exercice 4 : Un sac contient des objets de type A et de type B. Un objet de type A pèse 3,2 g, un de type B pèse 2,1 g. Il y a en tout 120 objets dans ce sac. Le contenu de sac pèse en tout 289,4 g. Déterminer le nombre d'objets de type A et celui de type B.

Question : Calculer le nombre d'objets de type A et celui de type B. Le système sera résolu en utilisant la technique de substitution.

Mise en équation : On note x le nombre d'objets de type A et y celui de type B.

- Le nombre total d'objets est de 120. On a donc $x + y = 120$
- Le poids des objets de type A est de 3,2 x . Celui des objets de type B est de 2,1 y . Le poids total étant de *289,4*, on obtient l'équation : $3{,}2\,x + 2{,}1y = 289{,}4$.

On a donc le système :

$$\begin{matrix} (E_1) \\ (E_2) \end{matrix} \begin{cases} x + y = 120 \\ 3{,}2\,x + 2{,}1\,y = 289{,}4 \end{cases}$$

Résolution : (E_1) donne : $x + y = 120$

$x = 120 - y$

On remplace dans (E_2) , ce qui donne :

$$3{,}2\,x + 2{,}1y = 289{,}4$$
$$3{,}2\,(120 - y) + 2{,}1y = 289{,}4$$
$$3{,}2\,\times 120 - 3{,}2y + 2{,}1y = 289{,}4$$
$$384 - 1{,}1\,y = 289{,}4$$
$$-1{,}1\,y = -94{,}6$$
$$y = \frac{-94{,}6}{-1{,}1} = 86$$

On utilise à nouveau (E_1) :

$$x = 120 - y$$
$$x = 120 - 86 = 34$$

Le sac contient donc 34 objets de type A et 86 de type B.