# SYSTEMES D'EQUATIONS

Exercice 1. La différence de deux nombres est 14 et leur somme est 56. Quels sont ces 2 nombres ?

Exercice 2. Une pièce de 2 € pèse 8,5 g et une pièce de 1 € pèse 7,5 g. Un tas de pièces de 2 € et de 1 € pèse 202,5 g, pour un montant de 40 € . Combien y a-t-il de pièces de 1 € et de 2 € dans ce tas ?


Exercice 3. Une entreprise artisanale fabrique 2 types d'objets en bois, notés A et B. Un objet de type A nécessite 3kg de bois et un objet de type B nécessite 5 kg de bois. Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163kg de bois pour fabriquer 45 objets. Déterminer le nombre d'objets réalisés pour chaque type.

Exercice 4. Bob se déplace de Lyon à New-York en combinant le train et l'avion. Il parcourt ainsi 6232 km au total. Le temps total de transport est de 9,75 h. Sachant que l'avion se déplace à une vitesse moyenne 752 km/h et le train à une vitesse moyenne de 202 km/h, déterminer la durée $T$ du trajet en avion et celle $t$ du trajet en train.

Mise en équation : Les inconnues sont ici la durée $T$ du trajet en avion et celle $t$ du trajet en train.

- Le temps total de transport est de 9,75 h. On a donc $T + t = 9{,}75$
- La distance parcourue est égale à la vitesse multipliée par le temps : $d = vitesse \times temps$ .

Ainsi la distance parcourue en avion est $d_{avion} = vitesse \times temps = 752\,T$ et celle parcourue en train est $d_{train} = vitesse \times temps = 202\,t$

La distance totale parcourue est de 6232 km. On a donc : $752\,T + 202\,t = 6232$ .
On a donc le système :

$$\begin{matrix}(E_1)\\(E_2)\end{matrix}\begin{cases} \mathrm{T} + \mathrm{t} = 9{,}75 \\ 752\,\mathrm{T} + 202\,\mathrm{t} = 6232 \end{cases}$$

Résolution :

| Résolution par substitution | Résolution par combinaison |
|---|---|
| $(E_1)$ donne : $T + t = 9{,}75$<br>$T = 9{,}75 - t$<br><br>On remplace dans $(E_2)$ , ce qui donne :<br>$752\,T + 202t = 6232$<br>$752\,(9{,}75 - t) + 202t = 6232$<br>$752 \times 9{,}75 - 752t + 202t = 6232$<br>$7332 - t(752 - 202) = 6232$<br>$-550\,t = -1100$<br>$t = \frac{-1100}{-550} = \frac{110}{55} = 2$<br><br>On utilise à nouveau $(E_1)$ :<br>$T = 9{,}75 - t$<br>$T = 9{,}75 - 2 = 7{,}75$<br>Le temps de trajet en avion est donc de 7,75 h, celui en train est de 2h. | $2(E_1)$ donne :<br>$752\,(T + t) = 752 \times 9{,}75$<br>$752\,T + 752\,t = 7332$<br>Le système est équivalent à :<br>$\begin{matrix}2(E_1)\\(E_2)\end{matrix}\begin{cases} 752\,T + 752\,t = 7332 \\ 752\,\mathrm{T} + 202\,\mathrm{t} = 6232 \end{cases}$<br><br>On écrit l'équation $2(E_1) - (E_2)$ :<br>$752t - 202t = 7332 - 6232$<br>$550\,t = 1100$<br>$t = \frac{1100}{550} = \frac{110}{55} = 2$<br>On utilise $(E_1)$ :<br>$T = 9{,}75 - t$<br>$T = 9{,}75 - 2 = 7{,}75$<br>Le temps de trajet en avion est donc de 7,75 h, celui en train est de 2h. |

Exercice 5. Une personne possède un bijou qu'elle souhaite vendre. Elle annonce qu'il est entièrement en or. Le bijoutier qui souhaite le racheter soupçonne qu'il soit composé d'or et d'argent.

1- Le bijoutier dispose d'eau, d'un verre gradué, d'une balance de précision et connaît les masses volumiques de l'or et de l'argent. Expliquer comment il peut procéder pour vérifier que ce bijou ne contient que de l'or ?


Il mesure la masse $m$ en grammes avec une balance et le volume $V$ en cm³ avec le verre gradué. Si le rapport $\frac{m}{V}$ est égal à la masse volumique de l'or, le bijou est entièrement en or. Si ce n'est pas le cas, c'est que le bijou n'est pas constitué uniquement d'or.

2- Les mesures donnent : masse : 394,5 g et volume de 25 cm³. Calculer la masse volumique du matériau de ce bijou. Ce bijou est-il en or pur ?

On a $m = 394{,}5$ et $V = 25$ . Le rapport $\frac{m}{V}$ donne $\frac{394{,}5}{25} = 15{,}78$ . On ne retrouve pas la masse volumique de l'or qui est de 10,5 g/cm³. Le bijou n'est donc pas en or pur.

3- Calculer le volume d'or et d'argent que contient ce bijou.

Mise en équation : Les inconnues sont le volume d'or que l'on notera $x$ et le volume d'argent que l'on notera $y$

- Le volume du bijou est de 25 cm³. On a donc : $x + y = 25$
- La masse de la part d'or de ce bijou est de $19{,}3 \times x$ grammes. Celle de la part d'argent est de $10{,}5 \times y$ grammes. Comme la masse totale est de 394,5 grammes, on a :
$$19{,}3\,x + 10{,}5\,y = 394{,}5$$

On a donc le système :

$$\begin{matrix}(E_1)\\(E_2)\end{matrix}\begin{cases} x + y = 25 \\ 19{,}3\,x + 10{,}5\,y = 394{,}5 \end{cases}$$

Résolution :

| **Résolution par substitution** | **Résolution par combinaison** |
|---|---|
| $(E_1)$ donne : $x + y = 25$<br>$x = 25 - y$<br><br>On remplace dans $(E_2)$ , ce qui donne :<br>$19{,}3\,x + 10{,}5\,y = 394{,}5$<br>$19{,}3\,(25 - y) + 10{,}5\,y = 394{,}5$<br>$19{,}3 \times 25 - 19{,}3y + 10{,}5\,y = 394{,}5$<br>$19{,}3 \times 25 - 19{,}3y + 10{,}5\,y = 394{,}5$<br>$482{,}5 - 8{,}8\,y = 394{,}5$<br>$-8{,}8\,y = -88$<br>$y = \frac{-88}{-8{,}8} = \frac{-8\times11}{-8\times1{,}1} = \frac{11}{1{,}1} = \frac{110}{11} = 10$<br><br>On utilise $(E_1)$ :<br>$x = 25 - y$<br>$x = 25 - 10 = 15$<br>Ce bijou est donc composé de 15 cm³ d'or et de 10 cm³ d'argent. | $19{,}3(E_1)$ donne :<br>$19{,}3\,(x + y) = 19{,}3 \times 25$<br>$19{,}3\,x + 19{,}3\,y = 482{,}5$<br>Le système est équivalent à :<br>$\begin{matrix}19{,}3(E_1)\\(E_2)\end{matrix}\begin{cases}19{,}3\,x + 19{,}3\,y = 482{,}5\\ 19{,}3\,x + 10{,}5\,y = 394{,}5\end{cases}$<br><br>On écrit l'équation $19{,}3(E_1) - (E_2)$ :<br>$19{,}3\,y - 10{,}5\,y = 482{,}5 - 394{,}5$<br>$8{,}8\,y = 88$<br>$y = \frac{88}{8{,}8} = 10$<br>On utilise $(E_1)$ :<br>$x = 25 - y$<br>$x = 25 - 10 = 15$<br><br>Ce bijou est donc composé de 15 cm³ d'or et de 10 cm³ d'argent. |

Devoir Maison à rédiger sur feuille de copie : L'effet papillon

1- Que signifie l'effet papillon : rechercher cette information sur internet

« Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? ». L'effet papillon traduit le fait qu'une infime modification des conditions initiales peut engendrer rapidement des effets très importants.

2- Utiliser la méthode de substitution pour résoudre le système $\begin{cases} \mathrm{x-y=1} \\ \mathrm{x-1{,}001y=2} \end{cases}$

On numérote les équations de ce système : $\begin{matrix} (E_1) \\ (E_2) \end{matrix} \begin{cases} \mathrm{x-y=1} \\ \mathrm{x-1{,}001y=2} \end{cases}$

L'équation $(E_1)$ donne : $\mathrm{x-y=1}$ donc $x = 1 + y$

On remplace dans $(E_2)$ : $\mathrm{x-1{,}001y=2}$

$$(1 + y) - 1{,}001y = 2$$

$$1 + 1y - 1{,}001y = 2$$

$$1 + y(1 - 1{,}001) = 2$$

$$1 - 0{,}001\,y = 2$$

$$-0{,}001\,y = 1$$

$$y = \frac{1}{-0{,}001} = -1000$$

On retrouve alors la valeur de $x$ : $x = 1 + y = 1 - 1000 = -999$

$(x, y) = (-999, -1000)$ est donc la seule solution du système $\begin{cases} \mathrm{x-y=1} \\ \mathrm{x-1{,}001y=2} \end{cases}$

3- Utiliser la méthode de combinaisons pour résoudre le système $\begin{cases} \mathrm{x-y=1} \\ \mathrm{x-0{,}999\,y=2} \end{cases}$

On numérote les équations de ce système : $\begin{matrix} (E_1) \\ (E_2) \end{matrix} \begin{cases} \mathrm{x-y=1} \\ \mathrm{x-0{,}999\,y=2} \end{cases}$

On écrit l'équation $(E_2) - (E_1)$ :

$$-0{,}999\,y - (-y) = 2 - 1$$

$$-0{,}999\,y + 1\,y = 1$$

$$y(-0{,}999 + 1) = 1$$

$$y \times 0{,}001 = 1$$

$$y = \frac{1}{0{,}001} = 1000$$

On retrouve alors la valeur de $x$ avec $(E_1)$ : $x = 1 + y = 1 + 1000 = 1001$

$(x, y) = (1001{,}1000)$ est donc la seule solution du système $\begin{cases} \mathrm{x-y=1} \\ \mathrm{x-0{,}999\,y=2} \end{cases}$

4- En quoi la résolution de ces 2 systèmes peut-elle illustrer ce que l'on appelle « l'effet papillon » ?

Les systèmes $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1{,}001y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0{,}999\,y = 2 \end{cases}$ sont presque les mêmes. La seule valeur qui est différente est 1,001 dans le premier système, qui est remplacé par 0,999 dans le second. Ces deux nombres 1,001 et 0,999 sont très proches. Par contre les solutions de ces systèmes sont très différentes :
$(-999, -1000)$ pour le premier système et $(1001{,}1000)$ pour le second.
On retrouve ici une illustration de l'effet papillon : « une infime modification des données d'un problème peut engendrer rapidement des effets très importants sur le résultat ».