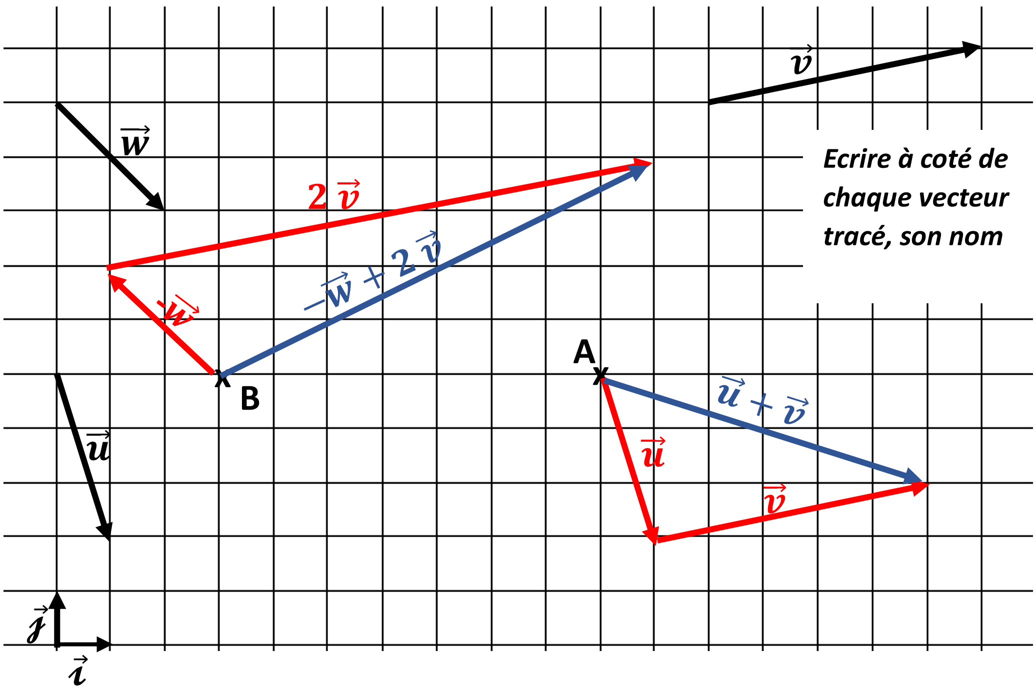
VECTEURS *Version B*

Exercice 1. *Vecteur et somme. Les tracés demandés ci-dessous sont à faire sur cette feuille*

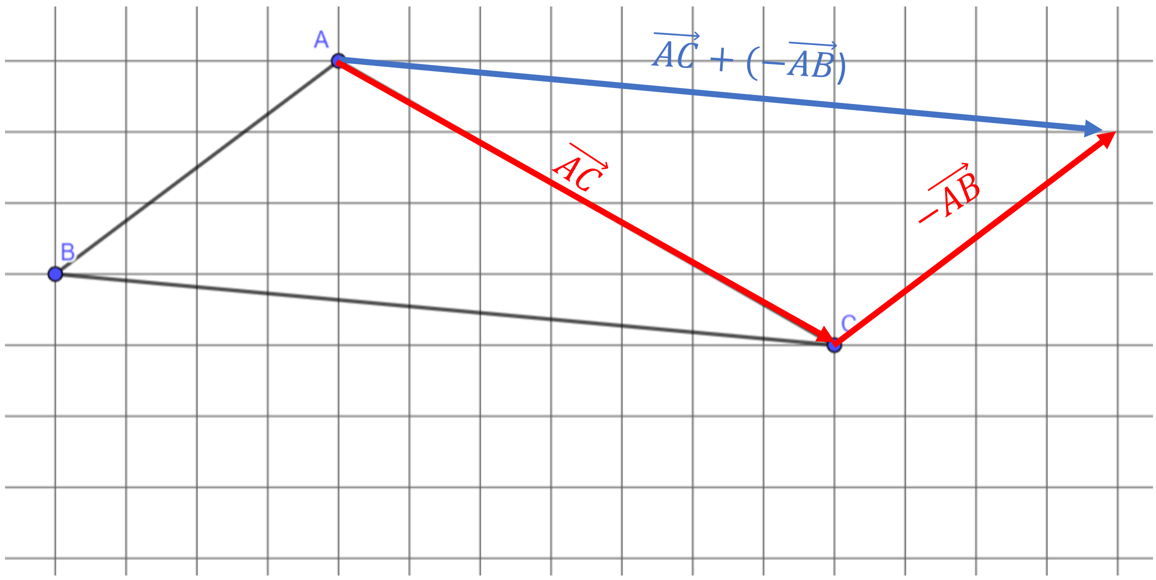
Soient les points A, B et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ci-contre :

1- Construire le vecteur d'origine A et égal à $\vec{u} + \vec{v}$

2- Construire le vecteur d'origine B et égal à $-\vec{w} + 2\,\vec{v}$



Exercice 2. : 1- Tracer sur la figure ci-dessous le représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et d'origine A. **Ecrire à coté de chaque vecteur tracé son nom.**



2- Utiliser la relation de Chasles pour calculer la somme $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ (répondre ci-dessous) :

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

Exercice 3. : Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,)$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit le vecteur $\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v}$.

1- Donner la définition d'une base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,)$.

La base $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,)$ est constituée de 2 vecteurs de norme égale à 1 et de directions perpendiculaires.

2- Ecrire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

$\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

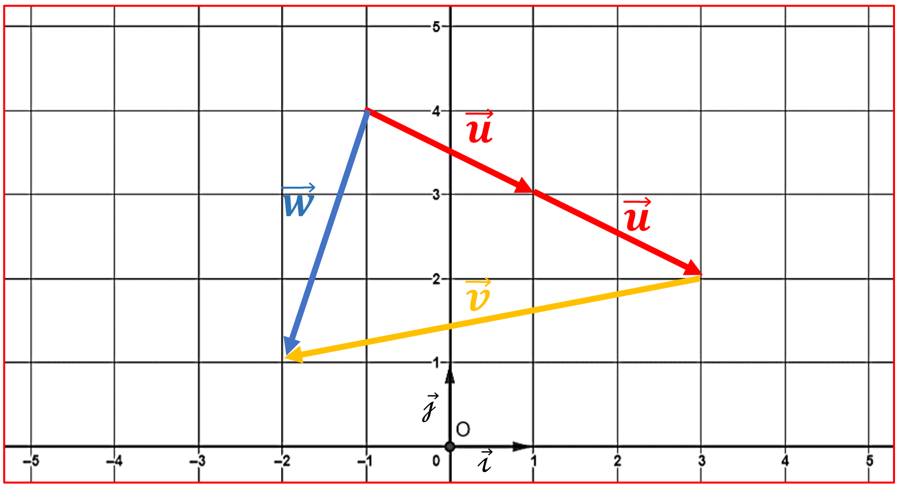
3- Ecrire le vecteur $\vec{w}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en écrivant le calcul $\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

$\vec{w} = 2\,\vec{u} + \vec{v} = 2\,(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + (-5\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} = -\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

4- En déduire les coordonnées de $\vec{w}$.

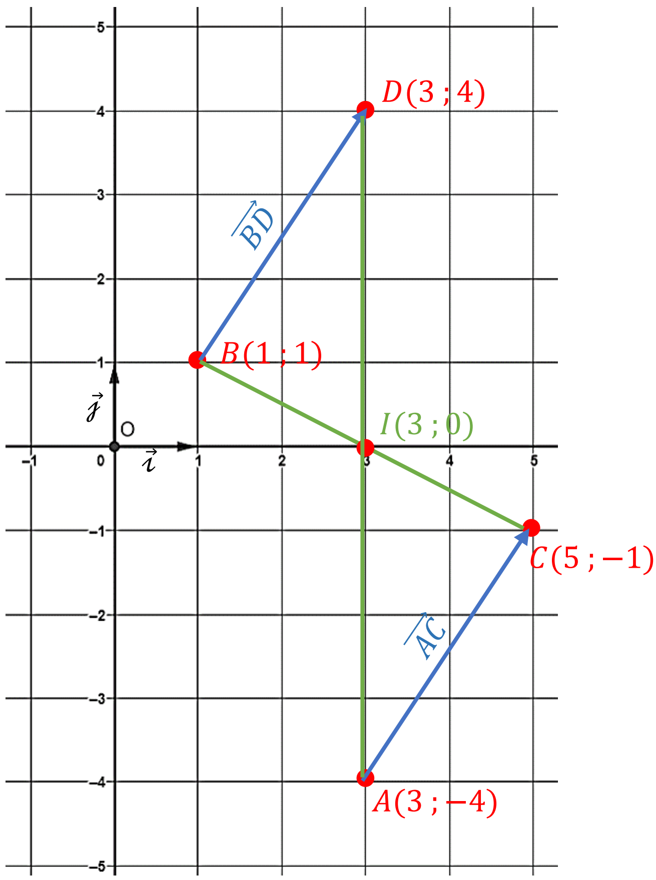
Les coordonnées de $\vec{w}$ sont ainsi $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

5- Vérifier le résultat précédent, en construisant **graphiquement sur votre feuille de copie**, le vecteur $2\vec{u} + \vec{v}$ à partir des vecteurs $2\,\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour la norme des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, prendre 1 grand carreau ou 2 petit carreau (1cm).



Exercice 4. : Soit les points A, B, C de coordonnées $A(3\,;\,-4)$, $B(1\,;\,1)$ et $C(5\,;\,-1)$. Soit le point D de coordonnées inconnues $D(x\,,y)$.

1- Tracer les points sur feuille de copie, dans un repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\,)$: pour la norme des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, prendre 1 grand carreau ou 2 petit carreau (1cm).



2- Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-3\\ -1-(-4)\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

3- Calculer en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D - x_B\\ y_D - y_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}$

4- Calculer les valeurs de x et y qui permettent d'avoir $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc on a : $2 = x - 1$ et $3 = y - 1$

$x = 3$ $y = 4$

Les coordonnées du point D sont donc $D(3\,;4)$

5- Peut-on en déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme ?

Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, on peut dire que les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont parallèles et sont de même longueur. $[AC]$ et $[BD]$ étant les côtés opposés du quadrilatère $ABDC$, on peut ainsi dire que $ABDC$ est un parallélogramme.

6- Calculer les coordonnées du point milieu *I* du segment *[BC]*. Vérifier le résultat en traçant le point I.

$$I\left(\frac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1+5}{2}\ ;\ \frac{1+(-1)}{2}\right)$$

$$I(3\ ;\ 0)$$

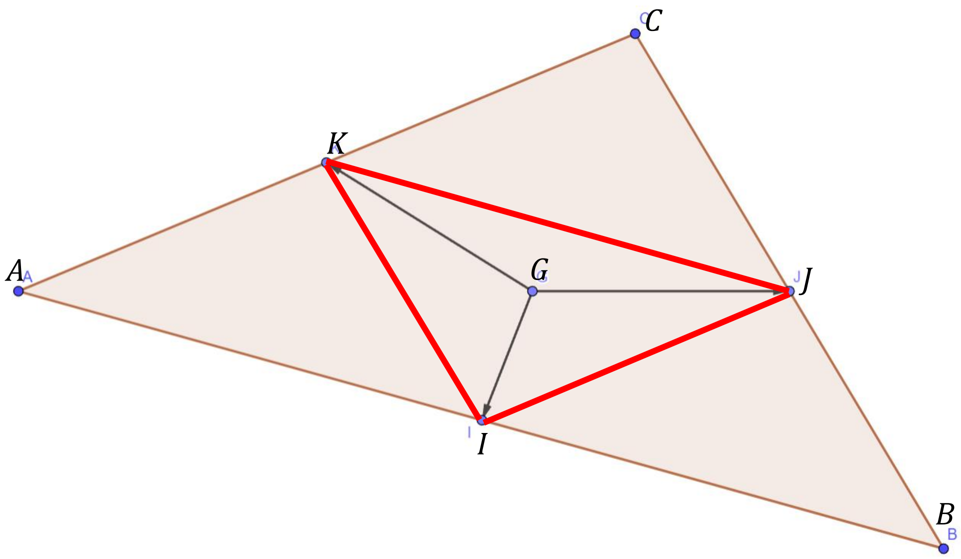
7- Sans utiliser de coordonnées, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Justifier.

$ABDC$ étant un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi le point I est aussi le milieu du segment $[AD]$. Ainsi on peut écrire la relation $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD}$

Exercice 5. : On donne ci-contre un triangle ABC quelconque. Les points I, J, K sont respectivement les milieux des cotés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Soit G le centre de gravité de ce triangle ABC. Ce point vérifie ainsi la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1- Montrer que $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
2- Tracer le triangle IJK
3- Montrer que G est aussi le centre de gravité du triangle IJK, c'est-à-dire que l'on a $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$



1- D'après la relation de Chasles, on peut écrire : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}$

Comme I est le milieu de $[AB]$, on peut écrire : $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

On a donc finalement : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

3- G est le centre de gravité du triangle IJK seulement si $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$.

G étant le centre de gravité de ABC , on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles plusieurs fois, on peut écrire :

$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} \quad + \quad \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JB} \quad + \quad \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Ce qui donne :

$$\overrightarrow{GI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad + \quad \overrightarrow{GJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \quad + \quad \overrightarrow{GK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Car J est le milieu de $[BC]$ et K, le milieu de $[AC]$.
En modifiant l'ordre des termes de cette relation, on a :

$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$$

Avec la relation de Chasles, on peut dire que : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$
Donc finalement : $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$
Le point G est donc aussi le centre de gravité du triangle IJK